

Cristian Voica

Mihaela Singer

Mihai Sorin Stupariu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XII-a

M5

Filiera teoretică

Profil umanist

- specializarea științe sociale

Filiera vocațională

Profil militar M.A.I.

- specializarea științe sociale

Filiera vocațională

Profil teologic: toate specializările

**SIGMA**

Unitatea de învățare 1. Ecuații și inecuații liniare	6
Situații cotidiene care conduc la ecuații sau inecuații	7
Modele de rezolvare a ecuațiilor, inecuațiilor și sistemelor	9
Rezolvarea unor ecuații, inecuații sau sisteme	18
Unitatea de învățare 2. Reprezentări grafice. Liniaritate	20
Reprezentarea și interpretarea datelor	21
Metoda grafică în studiul ecuațiilor și al inecuațiilor liniare	24
Elemente de programare liniară	30
Unitatea de învățare 3. *Legi de compoziție	34
Scrierea pozițională a numerelor raționale	35
Operații algebrice	40
Aplicații ale proprietăților operațiilor algebrice	48
Unitatea de învățare 4. Matrice	52
Calcul tabelar	53
Matrice și operații cu matrice	55
Utilizarea matricelor în practică	63
Unitatea de învățare 5. Determinanți și sisteme liniare	66
Rezolvarea sistemelor prin reducerea „în scară”	67
Sisteme și determinanți	69
Calculul determinanților: aplicații	78
Unitatea de învățare 6. *Grupuri	82
Mulțimile de numere și rezolvarea ecuațiilor	83
Structuri algebrice: monoizi și grupuri	86
Structuri algebrice: aplicații în geometrie	94
Unitatea de învățare 7. *Inele și corpuri	98
Proprietăți ale operațiilor algebrice	99
Structuri algebrice: inele și corpuri	101
Structuri algebrice pe mulțimea părților unei mulțimi	105
Unitatea de învățare 8. Matrice inversabile	108
Matrice și coduri	109
Inversa unei matrice. Metode de calcul	111
Ecuații matriceale	118
<i>Probleme recapitulative</i>	123
<i>Răspunsuri</i>	126
<i>Bibliografie</i>	128

Test inițial de autoevaluare

Rezolvând exercițiile următoare, îți vei aminti noțiuni necesare pentru parcurgerea acestei unități de învățare.

Calcul numeric

1. Efectuează:

a) $-15 + 23$;

b) $(-4 - 2) \cdot (4 + 2)$;

c) $2 \cdot 0 + 3 \cdot (1 - 2)$;

d) $\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{25} : \frac{3}{2}$;

e) $6,72 - (2,53 - 4,41)$;

f) $3\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2})$.

Proprietățile
operațiilor cu
numere

2. Calculează, folosind metoda factorului comun:

a) $2007 \cdot 2008 - 2007 \cdot 2007$

b) $(4 + 6 + 8 + 10) : 2$.

3. Efectuează calculele, apoi stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:

a) $(1 + 4) + 5 = 1 + (4 + 5)$;

b) $(1 - 4) - 5 = 1 - (4 - 5)$;

c) $(1 \cdot 4) \cdot 5 = 1 \cdot (4 \cdot 5)$;

d) $(1 : 4) : 5 = 1 : (4 : 5)$.

Procente

4. Calculează:

a) cât reprezintă 25% din 1400;

b) cât va costa un produs de 20 lei după o ieftinire de 15%;

c) cât la sută din 800 reprezintă 250.

Calcul algebric

Alege răspunsurile corecte!

5. $(x - 1)^2$ este egal cu:

a) $x^2 - 2x + 1$;

b) $x^2 - 1$;

c) $x^2 + 2x + 1$;

d) $x^2 + 1$.

6. $x^2 - 3x + 2$ este egal cu:

a) $(x - 3)(x + 2)$;

b) $(x + 1)(x + 2)$;

c) $(x - 1)(x - 2)$;

d) $(x + 2)^2$.

Inegalități

7. Stabilește care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $4 \cdot 2 < 4 \cdot 3$;

b) $(-4) \cdot 2 < (-4) \cdot 3$;

c) $(-4) \cdot (-2) \leq (-4) \cdot 0$;

d) $1234 \cdot (-3) \geq 1234 \cdot (-4)$;

e) $1234 \cdot 1233 \geq 1233 \cdot 1234$.

Intervale

8. Afirmațiile următoare se referă la numere reale.

Identifică afirmațiile false și propune câte un contraexemplu.

a) $x \leq a$ și $y \leq b \Rightarrow x + y \leq a + b$;

b) $x + y > a + b \Rightarrow x > a$ și $y > b$;

c) $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$;

d) $x \leq a$ și $y \leq b \Rightarrow x \cdot y \leq a \cdot b$;

e) $x \leq y \Rightarrow a \cdot x \leq a \cdot y$.

9. a) Scrie mulțimile de mai jos sub formă de interval și reprezintă-le apoi pe axă.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2\}$.

b) Determină mulțimile: $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus C$.

Situatii cotidiene care conduc la ecuații sau inecuații

Ne amintim și explorăm!

Uneori în viața de zi cu zi ne confruntăm cu probleme care conțin în enunțul lor cantități necunoscute. Pentru determinarea acestora trebuie, mai întâi, „să punem problema în ecuație”, cu alte cuvinte să identificăm relații matematice care descriu situația din enunț.

Să analizăm!

Exemplul 1

Doamna Georgescu dorește să-și cumpere un palton din Magazinul „Flora”. Pentru că inițial i s-a părut cam scump, a mai așteptat o lună. Între timp, paltonul s-a ieftinit cu 20 lei, apoi s-a mai aplicat încă o reducere de 15% și a ajuns astfel la prețul de 238 lei. Deoarece a uitat vechiul preț, doamna Georgescu ar vrea să-l calculeze pentru a vedea ce economie a făcut cumpărându-l mai târziu.

Notând cu p acest preț, doamna Georgescu a obținut:

$$p - 20 - \frac{15}{100}(p - 20) = 238.$$

Exemplul 2

Domnul Popescu a fost numit administrator al unui bloc cu 30 de apartamente, în care fiecare apartament are 2 sau 3 camere. Știind că în total sunt 78 de camere, dl. Popescu și-a propus să afle câte apartamente cu 2 camere și câte cu 3 camere sunt în bloc.

Pentru aceasta a notat cu d numărul apartamentelor cu două camere și cu t numărul celor cu 3 camere și a raționat astfel:

„Pe de o parte știu câte apartamente sunt în bloc, iar pe de altă parte știu câte camere sunt în bloc. Am, așadar, următoarele două relații: $d + t = 30$ și $2d + 3t = 78$.”

Exemplul 3

Întrebat de niște colegi ce vârste au copiii săi, domnul Gheorghiu le-a răspuns printr-o problemă: „Băiatul este cu 4 ani mai mare decât fata, iar anul viitor vor avea, împreună, 30 de ani.”

Primul prieten a gândit astfel: „Notez cu x vârsta fetei, deci vârsta băiatului este $x + 4$. Anul viitor cei doi copii vor avea vârstele $(x + 1)$, respectiv $(x + 5)$ și suma lor este 30, deci am relația: $(x + 1) + (x + 5) = 30$.”

Cel de-al doilea coleg a raționat în alt mod: „Să presupunem că vârsta fetei este f , iar vârsta băiatului este b . Despre f și b știu, așadar, că verifică două relații:

$$b = f + 4 \text{ și } (f + 1) + (b + 1) = 30.$$

Exemplul 4

Domnul Andronache este directorul unei firme. Făcând o estimare pentru luna în curs, a constatat că firma va avea cheltuieli în valoare de 21 000 de lei. Pe de altă parte, 25% din veniturile lunare sunt alocate pentru taxe și dezvoltare.

Dl. Andronache și-a pus problema ce venituri trebuie să obțină firma pentru a avea profit. Notând cu v aceste venituri, a observat mai întâi că suma rămasă după

efectuarea tuturor plăților este egală cu $v - 21000 - \frac{25}{100}v$, iar pentru a nu avea pierderi

▲ Cea mai veche problemă cunoscută apare într-un papyrus egiptean scris acum 3000 de ani. Problema cere să se afle o cantitate necunoscută, dacă știm că șeptimea ei împreună cu ea toată dau 19.

① Explică diferența dintre scăderea prețului unui produs cu 10% și scăderea prețului unui produs cu 10 bani.

② Explică în ce mod a obținut dl. Popescu aceste relații.

▲ Uneori aceeași problemă poate fi pusă în ecuație în mai multe moduri diferite.

3 Explică de ce în acest exemplu nu obținem o ecuație.

4 Construiește, folosind doar rigla și compasul, un triunghi care să aibă laturile egale cu 3 cm, 4 cm și 5 cm. Poți construi, folosind același procedeu, un triunghi având laturile de 3 cm, 4 cm și 8 cm? Explică!

5 Pune în evidență acești doi pași în fiecare dintre exemplele anterioare.

trebuie ca această sumă să fie mai mare decât 0, deci să aibă loc relația $v - 21000 - \frac{25}{100}v > 0$.

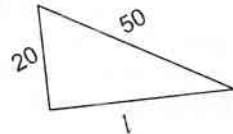
Exemplul 5

Organizatorii unui concurs sportiv trebuie să delimiteze cu jaloane un triunghi având una dintre laturi egală cu 20 m și altă latură egală cu 50 m. Pentru a determina ce lungime l poate avea cea de-a treia latură, organizatorii au folosit un rezultat de geometrie, și anume că într-un triunghi suma oricăror două laturi trebuie să fie mai mare decât cea de-a treia. Ei au obținut următoarele trei relații:

$$l + 50 > 20$$

$$20 + l > 50$$

$$50 + 20 > l$$



În fiecare dintre exemplele analizate mai sus, am transpus enunțul problemei sub forma unor relații matematice. Am obținut astfel: ecuații, inecuații, sisteme de ecuații, sisteme de inecuații.

În general

Pentru a transpune enunțul unei probleme sub forma unor relații matematice, procedăm astfel:

Etapa I: alegerea necunoscutei

- Citim enunțul cu atenție.
- Ne imaginăm situația descrisă cât mai exact posibil.
- Separăm ceea ce „se dă” de ceea ce „se cere”.
- Identificăm mărimile necunoscute.
- Analizăm enunțul și căutăm mărimea necunoscută cea mai potrivită pentru a fi notată cu o literă.

Etapa a II-a: punerea problemei în ecuație

- Căutăm să exprimăm cât mai simplu legături între date și cerințe.
- Stabilim un plan de acțiune.
- Efectuăm calcule parțiale și evaluăm natura rezultatului.

Exerciții și probleme

Scrive ecuațiile, respectiv inecuațiile prin care se exprimă matematic următoarele probleme:

1. Dacă, pentru a îndeplini un contract de livrare, o uzină ar fabrica zilnic 18 mașini, la termenul stabilit ar lipsi 4 mașini. Dacă uzina ar fabrica zilnic câte 20 de mașini, la termenul stabilit ar fi cu 10 mai multe decât prevede contractul. Câte mașini au fost comandate prin contract și în cât timp este prevăzut a fi fabricate?
2. Află numerele naturale cu proprietatea că diferența dintre triplul fiecăruia și jumătatea sa este mai mică decât 10.
3. Perimetrul unui dreptunghi este de 220 m. Dacă micșorezi lungimea sa cu 20 m, cu cât ar trebui mărită lățimea pentru ca perimetrul să rămână același?
4. Perimetrul unui dreptunghi este de 70 dm și lățimea este de 40% din lungime. Determină aria dreptunghiului.
5. Întrebat odată ce oră este, Pitagora a răspuns: „Până la sfârșitul zilei a rămas de două ori $\frac{2}{5}$ din cât a trecut de la începutul ei.” Ce oră este?
6. Dintr-un coș cu mere, Dănuț ia $\frac{5}{8}$ din numărul lor, apoi vine Ana și ia $\frac{4}{5}$ din numărul merelor rămase. Au rămas 15 mere. Câte mere au fost la început în coș?



Analizăm și generalizăm!

Problemele formulate în prima parte a acestei unități de învățare ne-au condus la diverse relații care conțin cantitățile necunoscute. Vom determina, pentru fiecare problemă în parte, mulțimile ale căror elemente verifică ipotezele problemei.

◆ Ce este o ecuație?

Să ne amintim!

O *ecuație* este o propoziție în care apare o singură dată semnul egal. O ecuație are doi *membri*. În cei doi membri ai unei ecuații apar variabile, numite *necunoscute*. Aceste necunoscute pot lua valori dintr-o mulțime, numită *domeniul de definiție* al ecuației.

În cazul în care domeniul de definiție D nu este precizat, acesta trebuie determinat, punând condiția ca pentru orice element al lui D expresiile care apar în cei doi membri ai ecuației să aibă definită valoarea.

O *soluție* a unei ecuații este un element al domeniului de definiție cu proprietatea că, înlocuit în ecuație, conduce la o propoziție adevărată.

Exemple

1) $2(x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x)$ este o ecuație având necunoscuta x . Cum ambii membri ai ecuației au sens pentru orice număr real x , domeniul de definiție este mulțimea \mathbb{R} .

Înlocuind x cu 1, rezultă propoziția adevărată $3 = 3$. Deci 1 este soluție a acestei ecuații. Pe de altă parte, înlocuind x cu 0, se obține propoziția falsă $-1 = 1$. Deci numărul 0 nu este soluție a acestei ecuații.

2) $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$ este o ecuație având necunoscuta x . Pentru ca numitorul care apare în membrul din stânga să fie diferit de 0 (împărțirea prin 0 nu are sens!) trebuie ca x să fie diferit de 1. Deci domeniul de definiție al ecuației este $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Numărul 3 este soluție a acestei ecuații.

3) $2x - y + 3 = 0$ este o ecuație având două necunoscute x și y , al cărei domeniu de definiție este $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Să analizăm!

A rezolva o ecuație înseamnă a găsi mulțimea tuturor soluțiilor acesteia.

Să considerăm, de exemplu, ecuația $2(x + 1) + (2x - 3) = x + (1 + x)$. Am văzut că numărul 1 este o soluție a acestei ecuații. Problema care se pune este dacă aceasta este singura soluție sau mai există și altele.

În general, pentru a determina toate soluțiile unei ecuații încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă efectuând transformări echivalente ale acesteia.

În cazul ecuației menționate procedăm astfel:

Efectuăm calculele și reducem termenii asemenea în cei doi membri

$$\begin{aligned} 2x + 2 + 2x - 3 &= x + 1 + x \\ 4x - 1 &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Adunăm în ambii membri ai ecuației $-2x$ (sau scădem $2x$)

$$(4x - 1) - 2x = (2x + 1) - 2x$$

Folosim asociativitatea și comutativitatea adunării

$$\begin{aligned} (4x - 2x) - 1 &= (2x - 2x) + 1 \\ 2x - 1 &= 1 \end{aligned}$$

▲ Cuvântul *ecuație* provine din latinescul „*aequatio*” și înseamnă *egalare*.

1) Stabilește dacă numărul -1 este o soluție a ecuației $x + 2(1 - x) = 5$.

2) Identifică necunoscutele și domeniile de definiție pentru ecuațiile:

$$\lg(x + 1) + \frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{2};$$

$$\sqrt{2x - 2} + y - 3 = 2.$$

3) Identifică proprietățile operațiilor cu numere utilizate în aceste calcule.

4) Explică de ce a fost util să adunăm $(-2x)$ la ambii membri. Ce s-ar fi întâmplat dacă adunam $(-4x)$?

5 Verifică faptul că numărul 1 este soluție a tuturor ecuațiilor care apar prin transformări echivalente din ecuația dată.

6 Explică de ce toate aceste transformări nu au modificat mulțimea soluțiilor ecuației.

7 Ce se întâmplă dacă înmulțim cu 0 ambii membri ai unei ecuații? De ce nu este aceasta o transformare care păstrează mulțimea soluțiilor?

8 Rezolvă ecuația $x \cdot (x - 2) + 3 \cdot (x - 2) = 0$.
Ce transformări echivalente ai folosit?

We know
books

Adunăm 1 în ambii membri

$$2x - 1 + 1 = 1 + 1$$
$$2x = 2$$

Înmulțim ambii membri cu $\frac{1}{2}$ și folosim faptul că 1 este element neutru pentru înmulțire.

$$\frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot 2$$
$$1 \cdot x = 1$$
$$x = 1$$

În urma tuturor acestor transformări am ajuns la concluzia că ecuația dată are aceeași mulțime de soluții cu ecuația $x = 1$. Deci mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \{1\}$.

În general

Pentru a rezolva o ecuație, încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă folosind transformări care nu schimbă mulțimea de soluții ale acesteia. Obținem astfel ecuații *echivalente* cu cea dată.

Transformările utilizate de obicei sunt:

- efectuarea de calcule algebrice în fiecare membru al ecuației;
- adunarea sau scăderea aceluiași termen în ambii membri ai ecuației;
- înmulțirea sau împărțirea ambilor membri cu același număr real nenul.

◆ Ce este o ecuație liniară?

Să analizăm!

În ecuațiile prezentate mai sus am întâlnit situații în care necunoscuta sau necunoscutele apăreau doar la puterea întâi, cum ar fi, de exemplu:

$$2 \cdot (x + 1) + (2x - 3) = x - (-1 - x) \text{ sau}$$
$$2x - y + 3 = 0.$$

În schimb, în ecuația $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 4$ necunoscuta x apare la numitorul unei fracții, iar numărătorul acesteia conține termenul x^2 .

În general

O ecuație care conține numai termeni de gradul întâi (adică termeni de forma $a \cdot x$, cu a număr real nenul și x necunoscută) și/sau termeni liberi (adică termeni care nu conțin necunoscute) se numește *ecuație liniară* (sau *ecuație de gradul întâi*).

9 Scrie o ecuație liniară cu necunoscutele x , y și z .

◆ Cum rezolvăm ecuații liniare cu o necunoscută?

Să analizăm!

În unul dintre exemplele anterioare am obținut ecuația liniară cu necunoscuta p :

$$p - 20 - \frac{15}{100}(p - 20) = 238.$$

Utilizând transformări echivalente, obținem succesiv următoarele ecuații, care au aceleași mulțimi de soluții ca și ecuația inițială:

$$\frac{17}{20}p - 255 = 0.$$

$$\frac{17}{20}p = 255.$$

$$p = 300.$$

Deci ecuația inițială are ca soluție numărul 300.

10 Exprimă în cuvinte transformările utilizate pentru rezolvarea ecuației $p - 2(p - 1) = 5$.

Orice ecuație liniară cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la o ecuație de forma $ax + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

În rezolvarea unei ecuații de forma $ax + b = 0$ putem folosi un algoritm care precizează mulțimea soluțiilor ecuației.

Să demonstrăm!

Despre mulțimea S a soluțiilor ecuației $ax + b = 0$, ($a, b \in \mathbb{R}$), $x \in \mathbb{R}$, putem spune că:

- $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$, dacă $a \neq 0$.
- $S = \emptyset$, dacă $a = 0$ și $b \neq 0$
- $S = \mathbb{R}$, dacă $a = 0$ și $b = 0$.

Adunând $-b$ la ambii membri, deducem că ecuația $ax + b = 0$ este echivalentă cu ecuația $ax = -b$.

• Dacă $a \neq 0$, înmulțind cu inversul numărului a (deci cu $\frac{1}{a}$), obținem ecuația echivalentă $x = -\frac{b}{a}$. De aceea, pentru $a \neq 0$, mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$.

• Dacă $a = 0$ și $b \neq 0$, ecuația $ax = -b$ se rescrie $0x = -b$. Cum pentru orice număr real x avem $0x = 0 \neq -b$, rezultă că ecuația $0x = -b$ nu are soluții. Deci $S = \emptyset$.

• Dacă $a = 0$ și $b = 0$, ecuația $ax = -b$ devine $0x = 0$. Cum orice număr real x verifică această relație, deducem că în acest caz avem $S = \mathbb{R}$.

Stabilește ce proprietăți ale operațiilor cu numere sunt utilizate în algoritmul de rezolvare a ecuației $3x + 7 = 0$.

Cum rezolvăm sisteme de ecuații liniare?

Să ne amintim!

Un sistem de ecuații se obține prin operația logică „și” din două sau mai multe ecuații. O soluție a sistemului este o soluție comună a tuturor ecuațiilor acestuia. A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea tuturor soluțiilor sale. Dacă toate ecuațiile care alcătuiesc un sistem sunt liniare, atunci sistemul se numește sistem de ecuații liniare (sau sistem de gradul întâi).

Exemple

1. Sistemul $\begin{cases} 2x + 4y - 3 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y .

2. Sistemul $\begin{cases} x^2 - y^2 + 4 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$ este un sistem de două ecuații cu necunoscutele x și y . Cum prima ecuație nu este liniară, acesta nu este un sistem de ecuații liniare.

În continuare, vom fi interesați de rezolvarea sistemelor de gradul întâi. Am văzut că orice ecuație de gradul întâi cu necunoscuta x poate fi adusă, prin transformări echivalente, la forma $ax + b = 0$. Există oare o formă simplă la care putem aduce, prin transformări echivalente, un sistem de ecuații liniare, fără a schimba mulțimea soluțiilor?

Am mai văzut că, în funcție de valorile lui a și b , mulțimea de soluții a ecuației $ax + b = 0$ poate avea un element, o infinitate de elemente, sau poate fi mulțimea vidă. Regăsim oare aceste trei situații în rezolvarea sistemelor de ecuații liniare?

Formează un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y care să conțină ecuația $2x - y - 1 = 0$.

Să analizăm!

Considerăm sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x și y :

$$\begin{cases} x + 2y + 1 = 6 - x + 3y \\ 2x - 3y - 3 = 1 + x - y \end{cases}$$

Adunând la ambii membri ai primei ecuații termenul $(x - 3y - 1)$ și reducând termenii asemenea se obține o ecuație echivalentă cu ea:

$$2x - y = 5.$$

În mod analog, cea de-a doua ecuație este echivalentă cu $x - 2y = 4$.

Transformările efectuate au avut ca scop obținerea unor ecuații echivalente cu cele inițiale, dar care conțin în membrul stâng numai termeni în care apar necunoscutele, iar în membrul drept termenul liber.

În concluzie, sistemul dat este echivalent cu sistemul:
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

În general

Prin efectuarea unor transformări echivalente convenabile ale ecuațiilor componente, orice sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele x și y poate fi adus la

forma
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

13 Explică ce transformare a fost efectuată asupra celei de-a doua ecuații.

14 Scrie forma mai simplă la care poate fi adus un sistem liniar cu trei ecuații și trei necunoscute.

15 Explică de ce am înmulțit a doua ecuație a sistemului cu -2 .

16 Rezolvă sistemul prin reducerea necunoscutei y .

Să ne amintim!

Putem determina mulțimea soluțiilor unui sistem liniar prin **metoda reducerii**.

Aplicăm această metodă în cazul sistemului
$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

Prima ecuație o lăsăm neschimbată (o înmulțim cu 1), iar pe cea de-a doua ecuație o înmulțim cu -2 .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \cdot (-2)$
Adunăm ecuațiile membru cu membru. În acest fel, reducem necunoscuta x și obținem o ecuație care are doar necunoscuta y .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ -2x + 4y = -8 \end{cases}$ $\hline / \quad 3y = -3$
Înlocuim a doua ecuație a sistemului cu ecuația cu o singură necunoscută obținută la pasul anterior. Obținem un sistem echivalent cu cel dat.	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3y = -3 \end{cases}$
Rezolvăm cea de-a doua ecuație a noului sistem, determinând valoarea lui y .	$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ y = -1 \end{cases}$
Înlocuim valoarea lui y în prima ecuație și calculăm pe x .	$\begin{cases} 2x - (-1) = 5 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} 2x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$
Scriem soluția sistemului.	$S = \{(2; -1)\}$

Să aplicăm!

În unul dintre exemplele anterioare (referitor la numărul de apartamente cu două, respectiv cu trei camere ale unui bloc de locuințe), am obținut sistemul de ecuații

liniare:
$$\begin{cases} x + y = 30 \\ 2x + 3y = 78 \end{cases}$$

Pentru a rezolva acest sistem prin metoda reducerii, este necesar să corelăm coeficienții variabilei x . Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu 2 și pe cea de-a doua cu -1 , apoi adunăm ecuațiile astfel obținute. Rezultă sistemul echivalent:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ -y = -18 \end{cases}$$

Cea de-a doua ecuație a acestui sistem are soluția unică $y = 18$. De aceea, sistemul considerat are, la rândul său, mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element, și anume perechea $(12, 18)$.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o singură soluție.
Un sistem de ecuații liniare care are mulțimea soluțiilor formată dintr-un singur element se numește *compatibil determinat*.

Exemplul 2

Am văzut că ecuația $0 \cdot x = 0$ are ca mulțime a soluțiilor \mathbb{R} , deci admite o infinitate de soluții. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme de două ecuații cu două necunoscute care să aibă, la rândul lor, mai multe soluții?

Să analizăm!

Considerăm sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$, în care prima și cea de-a doua ecuație coincid.

Perechile $(1, 0)$; $(0, 1)$; $(2, -1)$; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ aparțin mulțimii soluțiilor acestui sistem. De aceea, sistemul dat are o infinitate de soluții.

Să analizăm ce se întâmplă atunci când aplicăm metoda reducerii sistemului $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 4x - 6y = -2 \end{cases}$. Înmulțind prima ecuație cu -2 și adunând ecuațiile astfel obținute, obținem ecuația $0 = 0$. Sistemul dat este deci, echivalent cu sistemul $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$.

Acest sistem admite o infinitate de soluții. De aceea, aceeași proprietate o are și sistemul inițial.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare au o infinitate de soluții.
Un sistem de ecuații liniare care admite o infinitate de soluții se numește *compatibil nedeterminat*.

Ultima situație întâlnită în cazul ecuațiilor liniare a fost cea a ecuației incompatibile $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$, care are mulțimea soluțiilor vidă. Apare în mod natural întrebarea: există oare sisteme liniare de două ecuații care nu admit soluții?

Să analizăm!

Sistemul $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases}$ nu admite soluții. Într-adevăr, înmulțind prima ecuație cu -2

și adunând ecuațiile, obținem sistemul echivalent $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 0 \cdot y = 1 \end{cases}$.

Cum egalitatea $0 = 1$ nu poate avea loc pentru nici o valoare a lui x și y , rezultă că sistemul considerat nu are soluție.

În general

Unele sisteme de ecuații liniare nu au soluție.
Un sistem de ecuații liniare care nu admite nici o soluție se numește *incompatibil*.

▲ **Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil determinat, se ajunge la o ecuație de tip $a \cdot x = b$, cu $a \neq 0$.**

17 Găsește y astfel încât perechea $(3, y)$ să fie soluție a sistemului $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$. Stabilește apoi dacă $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ aparține mulțimii soluțiilor.

18 Explică ce legătură este între ecuațiile sistemului $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$. Găsește apoi trei elemente diferite ale mulțimii soluțiilor.

▲ **Aplicând metoda reducerii unui sistem compatibil nedeterminat, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = b$.**

19 Formează un sistem compatibil nedeterminat care să conțină ecuația $4x - 2y = -8$.

▲ **Aplicând metoda reducerii unui sistem incompatibil, se ajunge la o ecuație de tip $0 \cdot x = b$, cu $b \neq 0$.**

Cum rezolvăm sisteme liniare cu mai multe necunoscute?

Ideea centrală a metodei reducerii, pe care am aplicat-o unor sisteme de forma $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, constă în înmulțirea ecuațiilor cu numere convenabil alese, astfel încât, prin adunarea ecuațiilor astfel obținute, una dintre necunoscute să se reducă. Această metodă poate fi aplicată însă și unor sisteme de ecuații liniare având mai multe necunoscute.

Fie sistemul de ecuații liniare cu necunoscutele x, y și z :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem prin metoda reducerii putem proceda astfel:

Reducem mai întâi necunoscuta x din ultimele două ecuații. Pentru aceasta, înmulțim prima ecuație cu -3 și o adunăm cu a doua ecuație ...

$$\begin{array}{r} -3x - 3y - 3z = -6 \\ 3x + y - 2z = 7 \\ \hline -2y - 5z = 1 \end{array}$$

... apoi înmulțim prima ecuație cu -4 și o adunăm la a treia ecuație

$$\begin{array}{r} -4x - 4y - 4z = -8 \\ 4x - y + 2z = 0 \\ \hline -5y - 2z = -8 \end{array}$$

Obținem un sistem echivalent cu sistemul inițial

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 2z = 1 \\ -5y - 2z = -8 \end{cases}$$

Reducem necunoscuta y din ultimele două ecuații

$$\begin{array}{r} 10y + 25z = -5 \\ -10y - 4z = -16 \\ \hline 21z = -21 \end{array}$$

Obținem un sistem echivalent cu sistemul inițial

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2y - 5z = 1 \\ 21z = -21 \end{cases}$$

Rezolvăm succesiv ecuațiile sistemului și obținem soluția $(1; 2; -1)$.

Să analizăm!

În rezolvarea sistemului de mai sus, am aplicat transformări echivalente pentru a aduce sistemul la o formă de „scară”. Mai precis, am făcut acele transformări prin care fiecare ecuație a sistemului obținut are mai puține necunoscute decât ecuația anterioară. Această metodă poate fi folosită în rezolvarea oricărui sistem liniar.

Să aplicăm!

Considerăm sistemul următor, de trei ecuații liniare cu două necunoscute:

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$$

Aplicăm „metoda reducerii în scară” acestui sistem și îl aducem la forma

echivalentă:
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ -7y = -14 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ultima ecuație a sistemului obținut (adică $0 \cdot y = 0$) este verificată pentru orice valoare a lui y . De aceea, această ecuație poate fi neglijată.

Sistemul obținut este compatibil determinat, având mulțimea soluțiilor $S = \{(1, 2)\}$. Același mulțime de soluții o are deci și sistemul inițial.

Transformă sistemul dat, reducând mai întâi necunoscuta y .

Efectuează calculele intermediare și verifică faptul că $(1, 2, -1)$ este soluție a sistemului dat.

Aplică „metoda reducerii în scară” sistemului

$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$$

și arată că este sistem incompatibil.

O *inecuație* este o propoziție în care apare o singură dată semnul de inegalitate (strictă sau nu). O inecuație are doi *membri*, în care apar variabile numite *necunoscute*. Aceste necunoscute pot lua valori în *domeniul de definiție* al inecuației. O *soluție* a unei inecuații este un element al domeniului de definiție cu proprietatea că, prin înlocuirea sa în inecuație, conduce la o propoziție adevărată.

Exemple

1) $2x + 1 > x - 2$ este o inecuație cu necunoscuta x al cărei domeniu de definiție este \mathbb{R} .

Înlocuind x cu 0 în inecuație, obținem inegalitatea $1 > -2$, care reprezintă o propoziție adevărată. Deci 0 este soluție a acestei inecuații. De asemenea 1 este soluție, deoarece suntem conduși la propoziția adevărată $3 > -1$. În schimb, înlocuind x cu -3 obținem propoziția falsă $-5 > -5$. Deci -3 nu este soluție a inecuației date.

2) În exemplul 4 al primei părți a unității, am notat cu v veniturile unei firme. Ținând cont de cheltuielile existente, condiția de a nu avea pierderi a fost transpusă în relația $v - 2100 - \frac{25}{100}v \geq 0$, care este o inecuație cu necunoscuta v .

3) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} \geq x + 1$ este o inecuație, având domeniul de definiție $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

4) $\log_2 x \leq x + 1$ este o inecuație, având domeniul de definiție $D = (0, +\infty)$. Numărul 1 este o soluție a acestei inecuații, deoarece $\log_2 1 = 0$ și $0 \leq 2$.

5) $x + y - 2 < 0$ este o inecuație cu necunoscutele x și y , având domeniul de definiție $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Perechea $(2; -1)$ este soluție a inecuației, în timp ce $(2; 3)$ nu este soluție a acestei inecuații.

21) Stabilește care dintre numerele $-2; 0,5; -4$ este soluție a inecuației $2x + 1 > x - 2$.

22) Explică de ce numărul (-1) nu aparține domeniului de definiție al inecuației din exemplul 3. Găsește apoi câteva soluții ale acestei inecuații.

23) Găsește trei soluții ale inecuației $x + y - 2 < 0$, apoi reprezintă-le într-un reper cartezian xOy .

◆ **Cum rezolvăm inecuații de gradul întâi cu o necunoscută?**

Să analizăm!

Pentru a rezolva o inecuație, trebuie să descriem complet mulțimea soluțiilor acesteia. Vom analiza în continuare inecuații de gradul întâi cu o necunoscută, adică inecuații în care apar doar termeni liberi și termeni în care apare necunoscuta la puterea întâi. Ca și în cazul ecuațiilor, pentru a rezolva o inecuație de gradul întâi, încercăm să o aducem la o formă cât mai simplă.

Exemplu

Dragoș și Eugen și-au propus să rezolve inecuația de gradul întâi cu necunoscuta x și cu domeniul de definiție \mathbb{R} : $-3x - x + 5 > 3 - 2x - 2$.

Pentru început, amândoi au redus termenii asemenea din cei doi membri, obținând inecuația $-4x + 5 > -2x + 1$.

În continuare, Dragoș a adunat $4x - 1$ în ambii membri, a redus din nou termenii asemenea, obținând inecuația $4 > 2x$, pe care a rescris-o „de la dreapta la stânga”, adică $2x < 4$.

În final, înmulțind ambii membri cu numărul pozitiv $\frac{1}{2}$, Dragoș a obținut inecuația $x < 2$. El a dedus că mulțimea soluțiilor inecuației este $S = (-\infty, 2)$.



24) Dă exemple de inecuații de gradul întâi cu o necunoscută.